CAPITOLO 2

IL MODELLO DI CRESCITA DI SOLOW

Nella prima parte del capitolo esponiamo il modello di crescita di Solow[1]. Successivamente studieremo le proprietà di convergenza del reddito pro capite implicite nell'analisi di Solow ed accenneremo ad alcuni sviluppi recenti della teoria della crescita. In particolare, considereremo una funzione di produzione che ha tra i suoi argomenti il capitale umano nella funzione di produzione e accenneremo alla teoria della crescita endogena).

2.1. Le ipotesi del modello

Supponiamo che il sistema economico sia in una situazione di piena occupazione. Se l'economia è chiusa agli scambi con l'estero, ed in assenza del settore pubblico, vale la condizione di equilibrio tra produzione (Y) e spesa aggregata ($C+I$):

$$Y_t = C_t + I_t \qquad [2.1]$$

Gli investimenti lordi I_t sono definiti come somma degli ammortamenti e della variazione dello stock di capitale

$$I_t = \frac{dK_t}{dt} + \lambda K_t = \dot{K}_t + \lambda K_t, \qquad [2.2]$$

dove si è supposto che la quota di ammortamento (λ) sia una proporzione costante dello stock di capitale.

Supponiamo ancora che la funzione di produzione

$$Y = F(K, N), \qquad [2.3]$$

con $F_K > 0$, $F_{KK} < 0$, $F_N > 0$, $F_{NN} < 0$, sia una funzione omogenea di grado 1. In altre parole la funzione è caratterizzata da rendimenti di scala costanti nei fattori produttivi e decrescenti nell'unico fattore riproducibile (il capitale).

---

[1] Il modello, noto anche come modello Solow-Swan, è stato sviluppato da Robert Solow (1956) e T.W. Swan (1956).

Infine, la forza lavoro cresce al tasso esogeno n:

$$\frac{dN/dt}{N} = \frac{\dot{N}}{N} = n .$$

Se definiamo $y = Y/N$, $c = C/N$, $i = I/N$, $k = K/N$, possiamo riscrivere le equazioni precedenti come

$$y = c + i , \tag{2.4}$$

$$i = \dot{k} + nk + \lambda k , \tag{2.5}$$

$$y = f(k) . \tag{2.6}$$

La [2.5] si ottiene dalla [2.2] ricordando che $\dot{K} = \dot{(kN)} = \dot{k}N + k\dot{N}$. La [2.6] si ottiene dalla [2.3], utilizzando la proprietà delle funzioni omogenee di grado 1, cioè $(1/N)[F(K,N)] = F\left(\frac{K}{N},1\right) = f(k)$. Ricordiamo che tale proprietà implica che, nel caso di rendimenti di scala costanti, l'imprenditore può limitarsi a scegliere un dato rapporto $\frac{K}{N}$, piuttosto che K e N separatamente.

Sostituendo la [2.6] e la [2.5] nella [2.4], si ottiene infine l'equazione fondamentale della teoria della crescita:

$$f(k) = c + \dot{k} + nk + \lambda k . \tag{2.7}$$

La condizione di equilibrio stabilisce quindi che la produzione è pari alla spesa complessiva. Quest'ultima è uguale a consumo, investimenti netti, ammortamento e capitale necessario a dotare i nuovi lavoratori che entrano nel processo produttivo degli stessi mezzi produttivi di cui dispongono i lavoratori già impiegati.

Solow suppone inoltre che il risparmio sia una frazione costante del reddito prodotto. Cioè:

$$f(k) - c = sf(k) . \tag{2.8}$$

Sostituendo nella condizione di equilibrio si ottiene un'equazione differenziale non lineare (l'equazione fondamentale della teoria della crescita):

$$\dot{k} = sf(k) - (n + \lambda)k \tag{2.9}$$

L'equazione indica che l'economia cresce ($\dot{k} > 0$) se il risparmio è superiore all'investimento di sostituzione. L'equilibrio di lungo periodo del sistema ($\dot{k} = 0$) è dato dal valore di k implicitamente definito dall'equazione:

$$s\,f(k^*) = (n+\lambda)k^*. \qquad [2.10]$$

Per determinare la dinamica di *k*, rappresentiamo in un piano cartesiano le due componenti della [2.9]. Il termine $sf(k)$ riflette l'andamento della funzione di produzione. Essendo la funzione di produzione omogenea di grado 1 e, quindi, a rendimenti di scala costanti, la produttività marginale del capitale è decrescente. La funzione $(n+\lambda)k$ è, invece, una retta crescente che passa per l'origine.

L'investimento netto $(\dot{k})$ è dato dalla distanza verticale tra la curva $sf(k)$ e la retta nk. Se $sf(k) > (n+\lambda)k$, allora $\dot{k} > 0$ e k aumenta. Al contrario, se $sf(k) < (n+\lambda)k$ la crescita è negativa: k si riduce al passare del tempo. Quando $sf(k) = (n+\lambda)k$, $\dot{k} = 0$. In questo caso lo stock di capitale per addetto è costante nel tempo e pari a k^*. Questo livello di k^* è lo "stato stazionario" del sistema (steady-state), una situazione in cui il livello delle variabili non cambia nel tempo, ovvero il loro tasso di crescita è nullo. Poiché la forza lavoro cresce al tasso n, in stato stazionario il risparmio del sistema economico é appena sufficiente a dotare i nuovi lavoratori della stessa quantità di mezzi di produzione di cui dispongono i lavoratori già occupati e di sostituire il capitale obsoleto. La funzione $sf(k) - (n+\lambda)k$ può essere rappresentata direttamente (Figura 2.1).

L'equilibrio k^* è stabile: infatti se $k_0 < k^*$, allora $\dot{k} > 0$; se $k_0 > k^*$, allora $\dot{k} < 0$.

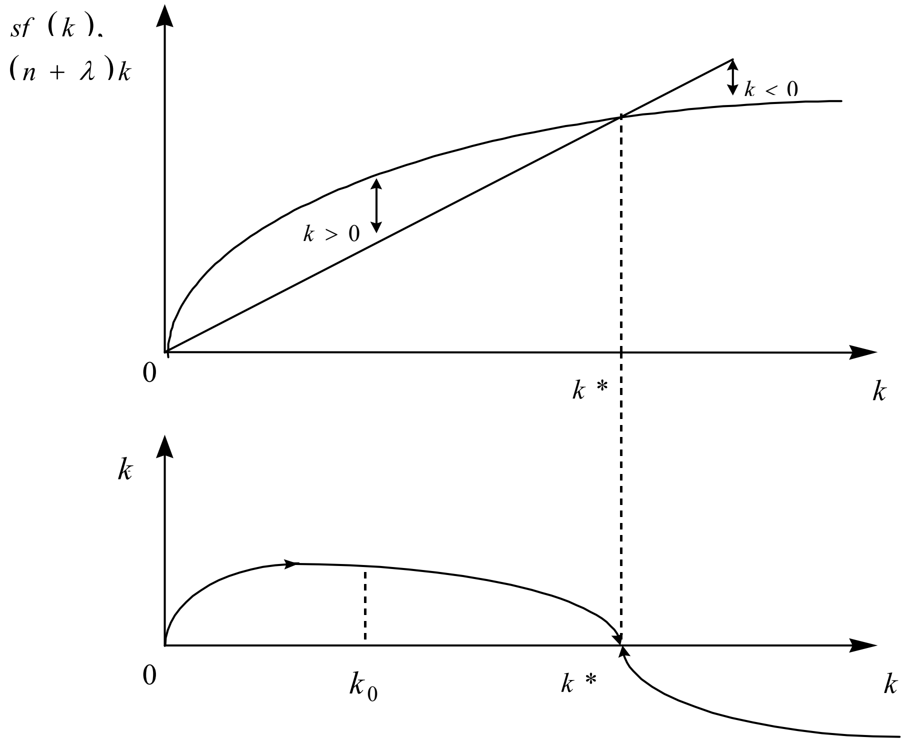

Figura 2.1. *La dinamica dello stock di capitale nel modello di Solow*

E' importante notare che in stato stazionario, anche se il capitale pro-capite è costante, lo stock di capitale, il reddito nazionale Y e la forza lavoro crescono ad uno tasso comune n.

Cosa accade allo stock di capitale di stato stazionario (k^*) in seguito ad una variazione della propensione al risparmio (s), del tasso di crescita della forza lavoro (n) o del tasso di ammortamento (λ)? Nel primo caso (Figura 2.2), un aumento della propensione al risparmio (s) sposta verso l'alto la curva $sf(k)$ e provoca un incremento dello stock di capitale di stato stazionario dal livello k^* al livello k^{**}. Un incremento del risparmio, infatti, provoca inizialmente un aumento degli investimenti netti e, nel lungo periodo, un aumento del capitale per addetto. Anche se in stato stazionario la variazione della propensione al risparmio non influenza la crescita del capitale per addetto (che continua ad essere nulla), nel passaggio da uno stato stazionario all'altro lo stock di capitale pro-capite aumenta fino a k^{**}. Osservando, infatti, la parte inferiore della Figura 2.2, si nota che in t_0 la propensione al risparmio aumenta da s_0 a s_1; tra t_0 e t_1 (il solo intervallo in cui $\dot{k} > 0$) il sistema passa al nuovo stato stazionario; in t_1 l'aggiustamento è completo. Durante il processo di aggiustamento, quindi, un aumento della propensione al risparmio provoca un aumento del tasso di crescita.

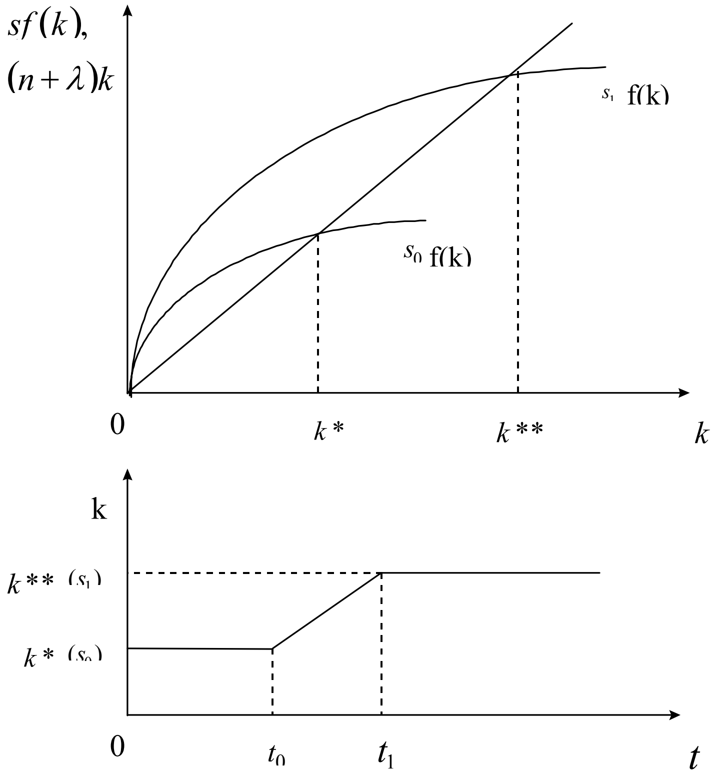

Figura 2.2. *Un aumento del risparmio nel modello di Solow*

Se invece aumenta il tasso di crescita della forza lavoro (Figura 2.3), l'inclinazione della retta $(n+\lambda)k$ aumenta e quindi lo stock di capitale per addetto di stato stazionario si riduce da k^* a k^{**}. Come nel caso precedente, in stato stazionario la crescita è nulla, ma nella transizione da uno stato stazionario all'altro il tasso di crescita è negativo. L'incremento del tasso di crescita della forza lavoro, non accompagnato da un pari aumento delle risorse investite in nuovo capitale, riduce la dotazione di capitale per lavoratore per addetto.

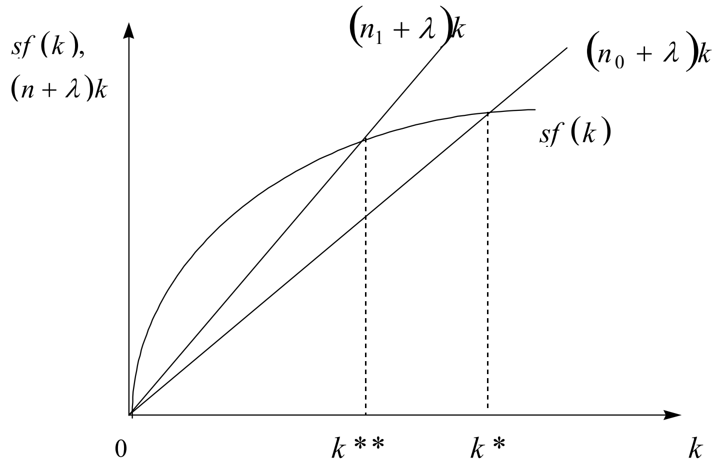

Figura 2.3. *Un aumento del tasso di crescita della forza lavoro nel modello di Solow*

Dal punto di vista grafico, un aumento del tasso di ammortamento (λ) comporta gli stessi effetti che nel caso di un aumento del tasso di crescita della forza lavoro. La riduzione dello stock di capitale in questo caso è dovuta alle maggiori risorse che l'economia deve impiegare per sostenere lo stock di capitale esistente. In altre parole gli ammortamenti corrispondenti a k^* sono insufficienti ad arginare la velocità con cui il capitale esistente di deprezza; questa é la ragione per cui, coeteris paribus, il capitale per addetto si riduce.

In conclusione, ogni aggiustamento da uno stato stazionario all'altro comporta una variazione (positiva o negativa) del livello del capitale per addetto. Affinché ciò si realizzi, è necessario che le grandezze assolute del modello crescano a tassi differenziati. Ad esempio in presenza di un incremento della propensione marginale al risparmio (fermo restando il tasso di crescita della popolazione ed il tasso di obsolescenza del capitale), il capitale e la produzione aumentano più rapidamente della forza lavoro. La crescita è massima immediatamente dopo lo shock e tende gradualmente a ridursi (fino ad annullarsi in corrispondenza del nuovo stato stazionario) a causa dell'andamento decrescente della produttività media del capitale pro-capite. Questo risultato si ricava immediatamente riscrivendo la [2.9] e ricordando che $f'(k)>0$ e $f''(k)<0$

$$\frac{\dot{k}}{k}=s\frac{f(k)}{k}-(\lambda+n), \qquad [2.11]$$

dove $\frac{\dot{k}}{k}$ rappresenta il tasso di crescita dell'economia e $\frac{f(k)}{k}$ il prodotto medio del capitale (Figura 2.4). In seguito all'aumento del risparmio che si verifica al tempo t_0, l'economia raggiunge il nuovo equilibrio k^{**}.

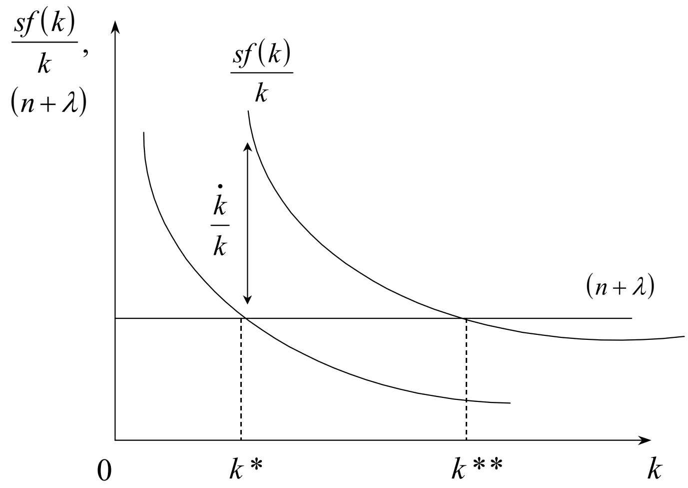

Figura 2.4. *La dinamica del tasso di crescita in seguito ad un aumento del risparmio*

Supponiamo infine che una guerra o una calamità naturale riducano lo stock di capitale da $k*$ a k_0 (Figura 2.5). Gradualmente l'economia torna a $k*$. Di nuovo, date le ipotesi sulla funzione di produzione, il tasso di crescita è massimo all'inizio del processo di aggiustamento, quindi si riduce gradualmente nel raggiungere $k*$.

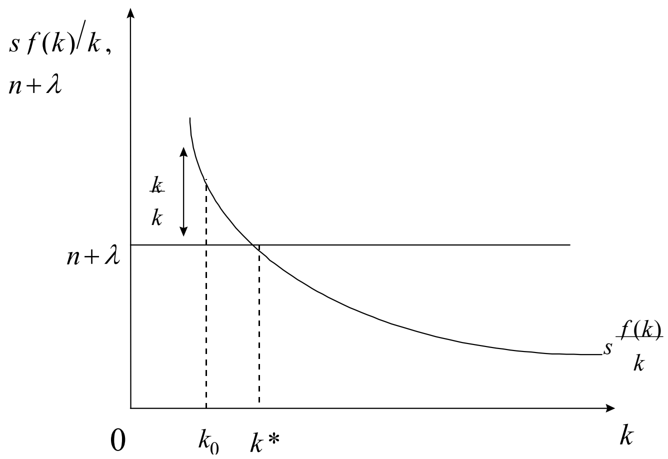

Figura 2.5. *L'effetto di una riduzione dello stock di capitale*

Esempio. Si consideri una funzione *Cobb-Douglas* già espressa in termini pro-capite:

$$y = f(k) = k^{\alpha}.$$

In stato stazionario, $s(k*)^{\alpha} = (n+\lambda)k*$ e quindi:

$$k^* = \left(\frac{s}{n+\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Considerando i valori $s = 0{,}1$, $n = 0{,}02$, $(1-\alpha) = 0{,}7$, $\lambda = 0{,}05$, si ha che in stato stazionario $k^* = 1{,}64$ e $y^* = (k^*)^{\alpha} = 1{,}16$.

2.2. La golden rule e l'inefficienza dinamica

Il problema che si affronta in questo paragrafo è di tipo "normativo". Ci si chiede come scegliere, tra tutti i possibili equilibri di lungo periodo, lo stock di capitale che garantisce il livello di consumo più elevato. Il consumo è dato dalla differenza tra reddito e risparmio:

$$c = f(k) - sf(k).$$

In stato stazionario (quando $\dot{k} = 0$), $sf(k^*) = (n+\lambda)k^*$ e, quindi:

$$c^*(s) = f[k^*(s)] - sf[k^*(s)]. \qquad [2.12]$$

L'espressione ricorda implicitamente che in stato stazionario il valore di k^* dipende dalla propensione al risparmio. Supponiamo ora che un pianificatore desideri massimizzare il consumo pro-capite in stato stazionario:

$$\max_{s} \; c^*(s),$$

che equivale ad individuare un valore di s e, quindi, un certo stock di capitale in modo da massimizzare l'espressione [2.12]. La condizione del primo ordine del problema è:

$$f'(k^*) = n + \lambda \qquad [2.13]$$

che è nota come "regola aurea" di accumulazione (*golden rule*). Essa indica che il livello di capitale di cui deve dotarsi un'economia affinché il consumo pro-capite sia massimo é quello in corrispondenza del quale la produttività marginale del capitale $f'(k)$ è pari alla somma del tasso di crescita della popolazione e del tasso di ammortamento.

Rappresentiamo su di un grafico gli investimenti di sostituzione $(n+\lambda)k$ e la funzione di produzione $f(k)$; la differenza tra $f(k)$ e $(n+\lambda)k$ è il consumo in stato stazionario (Figura 2.6). Si ricordi che ad ogni livello di k è associato un dato tasso di risparmio s, dati n e λ. Il consumo è massimo in corrispondenza di k^{GOLD}, e cioè del punto in cui la distanza tra $f(k)$ e $(n+\lambda)k$ è massima.

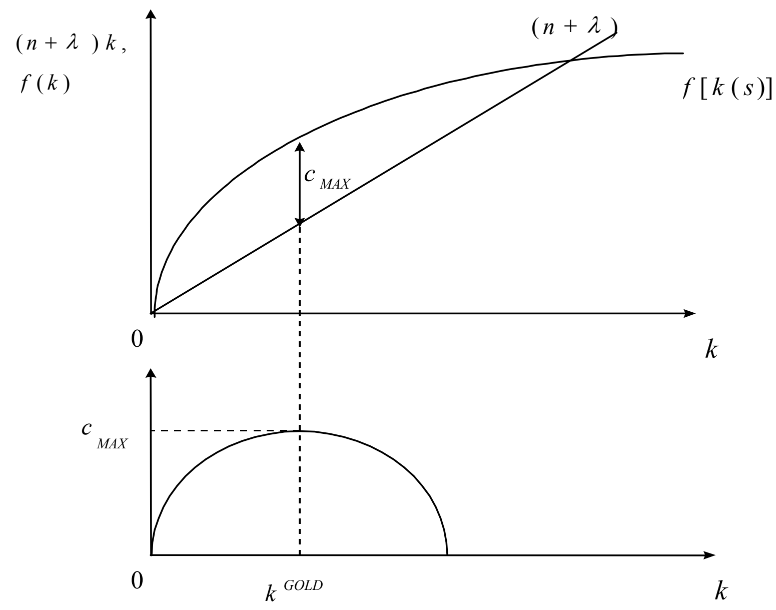

Figura 2.6. *La golden rule*

Un aumento di k fa aumentare il consumo di un ammontare pari a $f'(k)-(n+\lambda)$. Conviene quindi aumentare k fino a quando l'incremento di produzione è superiore all'incremento dell'investimento necessario a sostenere il più elevato livello di capitale (cioè fino a quando $f'(k)>n+\lambda$, la funzione di produzione è più ripida della funzione degli ammortamenti). Se invece $k>k^{GOLD}$, un aumento di k comporta un incremento degli investimenti di sostituzione maggiore della produzione ($f'(k)<n+\lambda$); in questo caso per aumentare il consumo occorre ridurre k.

Dato un certo livello di k^{GOLD}, l'intervallo "$0<k<k^{GOLD}$" individua la cosiddetta "regione di efficienza dinamica". In questa regione per aumentare c^* occorre aumentare gli investimenti, e quindi un aumento del risparmio aumenta gli investimenti, il reddito ed i consumi. Si noti che, inizialmente, a seguito di un aumento del risparmio, c si riduce per consentire una maggiore accumulazione [Figura 2.7 (a)]. Ciò significa che esiste un conflitto tra futuro e presente: per aumentare il consumo presente occorre ridurre quello futuro. Per $k>k^{GOLD}$ si ha invece la "regione di inefficienza dinamica", una situazione in cui l'economia ha accumulato troppo capitale. Una riduzione del risparmio riduce gli investimenti ed il reddito, ma aumenta (nel breve e nel lungo periodo) i consumi [Figura 2.7 (b)].

L'analisi è riassunta nella Figura 2.8. La regione di efficienza dinamica è ottimale secondo il criterio di Pareto, perché non è possibile aumentare il consumo delle generazioni future senza un aumento della propensione al risparmio e, quindi, senza una riduzione del consumo delle generazioni correnti. La regione di inefficienza dinamica non è invece ottimale secondo il criterio di Pareto, perché è possibile, riducendo il saggio di risparmio, aumentare il consumo delle generazioni future riducendo l'investimento corrente, e quindi aumentando anche il consumo delle generazioni correnti.

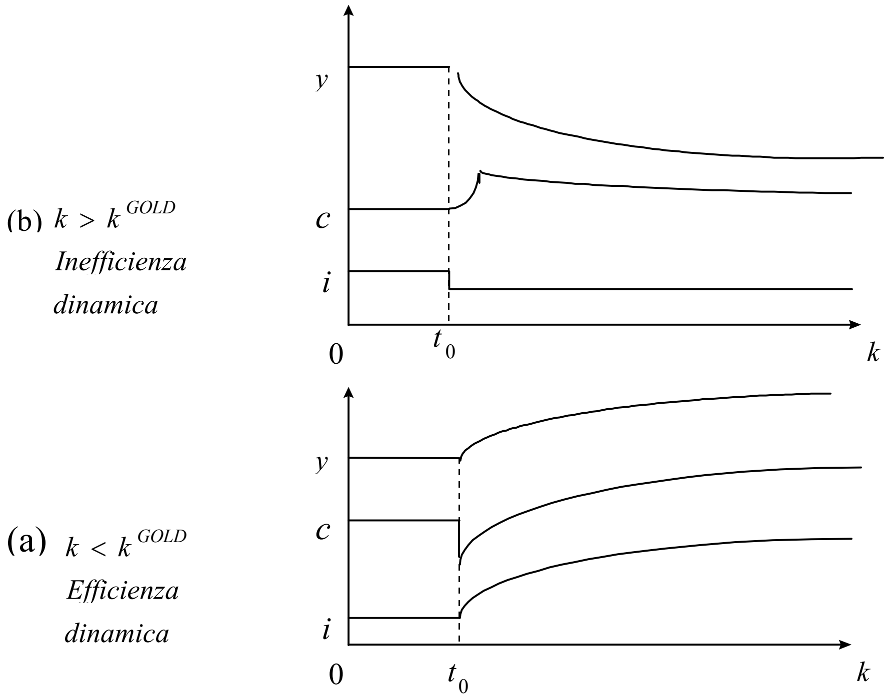

Figura 2.7. *Il sentiero del consumo, dell'investimento e del reddito durante il processo di aggiustamento*

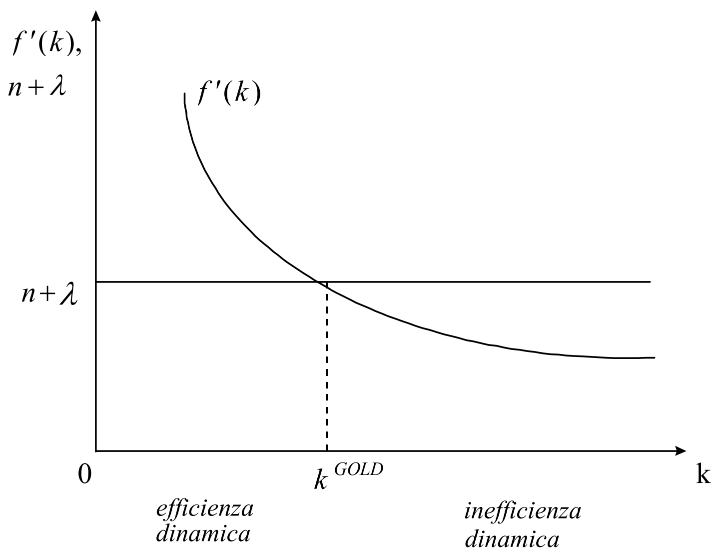

Figura 2.8. *Regioni di efficienza ed inefficienza dinamica*

Nei prossimi capitoli studieremo alcuni degli strumenti con cui le autorità di politica economica possono modificare il saggio di risparmio (tra i principali ricordiamo: la politica del debito pubblico, l'organizzazione del sistema previdenziale, gli incentivi fiscali al risparmio). Nel seguito di questo capitolo ci concentreremo, invece, sul progresso tecnico e su alcune proprietà implicite nel modello di Solow.

2.3. Crescita e progresso tecnico nel modello di Solow

L'analisi fin qui condotta ha evidenziato che nel modello di Solow in stato stazionario la crescita del reddito per addetto è nulla. Ma allora, cosa spiega nel lungo periodo la crescita dei sistemi economici? Per rispondere a questa domanda introduciamo in questo paragrafo il concetto di "progresso tecnico" (t), che riflette il fatto che il contributo produttivo dello stesso ammontare di capitale e di lavoro aumenta al passare del tempo. Ovvero:

$$Y_t = F(K_t, N_t, t) - \lambda K_t . \qquad [2.14]$$

In quanto segue supponiamo che il progresso tecnico sia "incorporato" nel fattore lavoro, è cioè che al passare del tempo il fattore lavoro diventi più produttivo. Verificheremo che il progresso tecnico, anche in assenza di crescita della forza lavoro, permette di spiegare perché un'economia cresce anche lungo nel lungo periodo.

Definiamo la forza lavoro "effettiva" $\hat{N}_t$ come

$$\hat{N}_t = N_t e^{gt} = N_o e^{(n+g)t} , \qquad [2.15]$$

dove abbiamo supposto che la forza lavoro (N_t) cresca al tasso n. Supponiamo ora che la produzione dipenda dalla forza lavoro effettiva

$$Y_t = F\left(K_t, \hat{N}_t\right).$$

L'equazione fondamentale della crescita è:

$$\dot{K} = sF(K_t, \hat{N}_t) - \lambda K_t . \qquad [2.16]$$

Se la funzione di produzione è omogenea di grado 1 (cioè a rendimenti di scala costanti), è possibile esprimere le variabili in termini di unità di lavoro effettive. Dividendo la [2.16] per $\hat{N}_t$, si ottiene:

$$\dot{k} = sf(k) - (\lambda + n + g)k , \qquad [2.17]$$

dove ora $k = \dfrac{K_t}{N_t\, e^{gt}}$.

L'equazione indica che lo stock di capitale per unità di lavoro effettiva cresce se il risparmio è maggiore dell'investimento di sostituzione. Quest'ultimo comprende l'ammortamento, le risorse investite per dotare di capitale i nuovi lavoratori e le unità di capitale aggiuntive distribuite in ogni periodo ai lavoratori divenuti più efficienti. Verifichiamo ora che l'introduzione del progresso tecnico assicura una crescita costante del reddito nazionale e del reddito per addetto, anche se il capitale ed il reddito per unità di lavoro effettivo sono costanti in stato stazionario. Infatti, in equilibrio $\left(\dot{k}=0\right)$ si ha

$$sf(k^*)=\left(n+g+\lambda\right)k^*,$$

che implicitamente definisce un livello costante di k (e quindi di y) in stato stazionario; dal punto di vista grafico, l'unica differenza con il modello senza progresso tecnico è data dal fatto che la retta $\left(n+g+\lambda\right)$ è più inclinata. Si noti ora che anche se y è costante, il reddito nazionale Y cresce al tasso $(n+g)$:

$$Y=y^*N_0\,e^{(n+g)t}$$

Inoltre, il reddito pro capite

$$\frac{Y}{N}=y^*e^{gt}$$

cresce al tasso g. E' facile verificare che anche il salario cresce al tasso g. Infatti:

$$\frac{\partial Y}{\partial N}=\frac{\partial\left[N\,e^{gt}\,f\left(\frac{K}{N\,e^{gt}}\right)\right]}{\partial N}=e^{gt}\left[f(k)-f'(k)\,k\right].$$

Come in precedenza, in stato stazionario, la crescita $(n+g)$ è indipendente dalla tecnologia e dal risparmio. Tuttavia, variazioni nei parametri g, n, λ ed s influenzano il livello del capitale per unità di lavoro effettiva (generando crescita positiva o negativa di k nel passaggio da uno stato stazionario all'altro), in modo analogo a quanto visto nelle Figure 2.2 e 2.3; naturalmente la retta degli investimenti di sostituzione è più inclinata a causa della presenza del parametro g.

Dividendo la [2.17] per k, si ottiene un'espressione del tasso di crescita del capitale per unità di lavoro effettivo:

$$\frac{\dot{k}}{k}=s\frac{f(k)}{k}-(n+g+\lambda)=s(APk)-(n+g+\lambda)=\rho. \qquad [2.18]$$

dove APk, decrescente per le ipotesi fatte sulla funzione di produzione, rappresenta il prodotto medio di k, il cui andamento dipende dalla produttività marginale di k. Affinché si abbia crescita è necessario, quindi, che la produttività media del capitale sia sufficientemente elevata.

2.4. La convergenza del reddito

Consideriamo due economie (A e B) con la stessa propensione al risparmio (s), lo stesso tasso di ammortamento (λ) e lo stesso tasso di crescita della forza lavoro (n) e del progresso tecnico (g). Le due economie sono quindi caratterizzate dallo stesso stato stazionario k^*. Le due economie, tuttavia, hanno inizialmente uno stock di capitale diverso, con $k_A < k_B$; ne segue che $APk_A > APk_B$. L'equazione (2.18) indica che l'economia A cresce ad un tasso maggiore dell'economia B. Quindi le due economie, nel lungo periodo, convergeranno allo stesso stato stazionario; questa proprietà del modello è indicata con il termine di "convergenza assoluta". Poiché la crescita del reddito è proporzionale alla crescita dello stock di capitale, nel lungo periodo anche il reddito per addetto dei due paesi converge.

Se le due economie, invece, sono caratterizzate da valori di (n, s, g, λ) diversi tra loro, ciascuna converge ad uno stato stazionario diverso. Tuttavia, la proprietà della "convergenza condizionata" stabilisce che il tasso di crescita ρ di ciascuna economia sarà tanto maggiore, quanto più essa è lontana dal proprio stato stazionario. Infatti dalla [2.18], e ricordando che $sf(k^*) = (n+g+\lambda)\,k^*$, si ha che :

$$\rho = (n+g+\lambda)\left(\frac{APk}{APk^*} - 1\right),$$

e quindi che il tasso di crescita di un'economia è tanto maggiore quanto maggiore è il rapporto tra la produttività media del capitale (APk) e la produttività media del capitale di stato stazionario (APk^*).

2.6. Il modello di Solow con capitale umano

La letteratura recente sulla crescita economica ha sottolineato il ruolo che la dotazione di capitale umano (formazione lavoro, istruzione) può avere sulla crescita economica. Mankiw, Romer e Weil (1992) hanno proposto un modello in cui la funzione di produzione comprende tra i suoi argomenti anche il "capitale umano" (H); cioè :

$$Y = K^{\alpha} H^{\beta} (AN)^{1-\alpha-\beta}.$$

Dividendo per AN si ottiene:

$$y = k^{\alpha} h^{\beta}.$$

Lo stock di capitale fisico e lo stock di capitale umano crescono se il risparmio è superiore all'investimento di sostituzione:

$$\dot{k} = s_k\, y - (g+n+\lambda)\, k$$
$$\dot{h} = s_h\, y - (g+n+\lambda)\, h$$

In stato stazionario, $\dot{k} = \dot{h} = 0$, e quindi:

$$s_k\, k^{\alpha} h^{\beta} = (g+n+\lambda)\, k \qquad [2.19]$$

$$s_h\, k^{\alpha} h^{\beta} = (g+n+\lambda)\, h \qquad [2.20]$$

da cui

$$h = s_h\, s_k^{\ -1}\, k\,.$$

Dividendo la [2.19] per k, raggruppando i termini e risolvendo si ottengono i valori di steady-state dei due stock di capitale:

$$k^* = \left[\frac{s_h^{\ \beta}\, s_k^{\ 1-\beta}}{g+n+\lambda}\right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \qquad [2.21]$$

$$h^* = \left[\frac{s_h^{\ 1-\alpha}\, s_k^{\ \alpha}}{g+n+\lambda}\right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}. \qquad [2.22]$$

Sostituendo nella funzione di produzione $y = k^{*\alpha}\, h^{*\beta}$ e prendendo i logaritmi si ottiene:

$$\ln y = \frac{\beta}{1-\alpha-\beta} \ln s_h + \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta} \ln s_k - \frac{(\alpha+\beta)}{1-\alpha-\beta} \ln(n+g+\lambda) =$$

$$= \beta_1 \ln s_h + \beta_2 \ln s_k + \beta_3 \ln(g+n+\lambda). \qquad [2.23]$$

Mankiw, Romer e Weil stimano l'equazione [2.23] e sottopongono a test il vincolo $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0$.

Si noti che nel caso in cui il capitale umano non influenza la funzione di produzione $(y = k^{\alpha})$, l'equazione [2.23] si riduce a

$$\ln y = \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln s_k - \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln(g+n+\lambda) =$$

$$= \beta_1 \ln s_k + \beta_2 \ln(g+n+\lambda).$$

In questo caso il vincolo tra i coefficienti da sottoporre a test è $\beta_1 + \beta_2 = 0$; inoltre se $\alpha = 0{,}3$, i coefficienti stimati dovrebbero essere $\beta_1 = 0{,}43$, $\beta_2 = -0{,}43$. L'analisi empirica condotta da

Mankiw, Romer e Weil conferma l'influenza del tasso di crescita della popolazione e del tasso di risparmio per la determinazione del livello del reddito pro-capite nella direzione indicata da Solow. Tuttavia, il capitale umano, misurato dai tassi di scolarità, migliora la qualità delle stime. In questo caso il vincolo $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0$ non è rifiutato dai dati, e suggerisce valori di α e β realistici. Anche la proprietà di convergenza condizionata del modello di Solow trova conferma empirica: controllando per i tassi di risparmio e di crescita della popolazione, i paesi con livello di reddito iniziale inferiore crescono più velocemente, in particolare quando si considera l'effetto del capitale umano (in questo caso il tasso di convergenza è di circa il 2%).

2.6. La crescita endogena

Supponiamo che la funzione di produzione sia lineare nello stock di capitale

$$y = Ak\,.$$

Si nota immediatamente che in questo caso la produttività media del capitale A è costante. Le ragioni che possono giustificare l'esistenza di rendimenti di scala costanti nel fattore capitale sono numerose. Ad esempio:

(a) rendimenti di scala crescenti, ovvero una funzione di produzione del tipo $Y = A K^{\alpha} N^{\beta}$, con $\alpha = 1$;

(b) esternalità nella produzione, ovvero una situazione in cui la singola impresa opera con rendimenti di scala costanti, ma esistono esternalità a livello aggregato di produzione,

(c) learning by doing, ovvero una situazione in cui il processo di apprendimento dei lavoratori aumenta la capacità produttiva del sistema economico

(d) la presenza, tra i fattori produttivi, del capitale umano, ovvero il considerare esplicitamente che anche il fattore lavoro è riproducibile;

(e) la differenziazione dei prodotti e la specializzazione del lavoro, sicché la produzione aggregata è funzione non solo della quantità impiegata dei fattori produttivi, ma anche della varietà del capitale e della specializzazione produttiva;

(f) lo sviluppo degli intermediari finanziari, nella misura in cui aumentano la qualità degli investimenti e la produttività del capitale.

In questo paragrafo esaminiamo come si modifica il modello di Solow con questa particolare funzione di produzione. In assenza di crescita della forza lavoro ($n = 0$) e di progresso tecnico $(g = 0)$, l'equazione della crescita è data da:

$$\dot{k} = sAk - \lambda k\,.$$

Il tasso di crescita in stato stazionario è costante e pari a:

$$\frac{\dot{k}}{k} = \rho = sA - \lambda\,,$$

La Figura 2.9 mostra che se $y = Ak$, un sistema economico ha crescita positiva in stato stazionario. E' immediato notare che una variazione della produttività del capitale (A), dell'ammortamento (λ) e del tasso di risparmio (s) ha un effetto permanente sul tasso di crescita di stato stazionario. Per questo motivo si dice che in questo modello la crescita è endogena. Si noti inoltre che il modello non prevede convergenza tra i tassi di crescita: se due paesi hanno gli stessi parametri (A, s, λ) ma $y(0)$ è diverso, le due economie avranno la stessa crescita del reddito, ma il divario di reddito tra le due economie permane nel tempo.

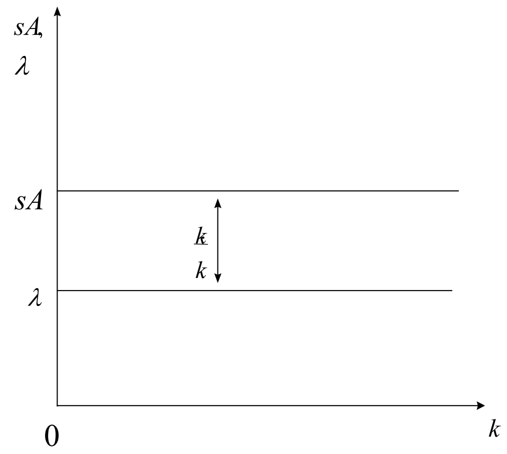

Figura 2.9. *Il tasso di crescita in un modello con crescita endogena*

2.7. Sommario

La tabella che segue riassume la relazione tra risparmio e crescita nei modelli che abbiamo studiato.

Effetto di un aumento del risparmio sul tasso di crescita

	in stato stazionario	durante il processo di aggiustamento
progresso tecnico esogeno	**0**	+
crescita endogena	+	+*

* In questo caso l'economia si adegua immediatamente al nuovo tasso di crescita (l'aggiustamento è istantaneo).

La tabella indica che in genere un aumento del risparmio provoca un aumento del tasso di crescita. Tuttavia nel caso di progresso tecnico esogeno, l'aumento è solo temporaneo perché nel lungo periodo il tasso di crescita del reddito è dato da ($n + g$).