CAPITOLO 3

IL PROBLEMA DEL CONSUMATORE

In questo capitolo ci concentriamo sulla scelta intertemporale tra consumo e risparmio, trascurando gli altri aspetti del sistema economico. L'analisi ha cioè caratteristiche di equilibrio parziale. Inizieremo presentando un modello di scelta con due soli periodi. Successivamente esamineremo le proprietà del modello del ciclo vitale. L'ultima parte del capitolo si concentra sull'effetto del tasso di interesse e della crescita della produttività sul risparmio e sviluppa un modello in tempo continuo.

3.1 Il modello con due periodi

Il modello delle scelte intertemporali consente di analizzare alcuni aspetti fondamentali delle scelte del consumatore; ad esempio:

- la relazione tra funzione del consumo ed equazione di Eulero;
- l'effetto di una variazione del tasso di interesse sul consumo;
- il consumo in condizioni di incertezza (sul reddito, sul tasso di interesse, sulla durata della vita);
- le scelte di consumo quando i mercati sono completi e quando il consumatore opera in mercati finanziari imperfetti (vincoli di liquidità).

In questo paragrafo sviluppiamo un modello basato sulle seguenti ipotesi:

- All'inizio del periodo 1, il consumatore possiede una sola attività (a_1).
- Il tasso di interesse (r_2) viene corrisposto nel secondo periodo su attività detenute dal primo al secondo periodo.
- Il reddito da lavoro (y_1, y_2) è esogeno.
- I mercati dei capitali sono perfetti e non vi è incertezza.

Si consideri dapprima il vincolo di bilancio dinamico (VDB) del consumatore. Il VBD determina come varia la ricchezza nel corso della vita del consumatore. In generale, considerando t periodi si avrà:

$t = 1$ $\qquad a_1$ è data; [3.1]

$t = 2$ $\qquad a_2 = (1 + r_2)(a_1 + y_1 - c_1)$; [3.2]

$t = 3$ $\qquad a_3 = (1 + r_3)(a_2 + y_2 - c_2)$; [3.3]

... $\qquad$ ....

$t = t + 1$ $\qquad a_{t+1} = (1 + r_{t+1})(a_t + y_t - c_t)$.

Si noti che all'inizio di ciascun periodo la ricchezza è uguale alla somma della ricchezza del periodo precedente e del risparmio $\left(y_t - c_t\right)$ più gli interessi maturati nel periodo.

Nel caso di due periodi ed in assenza di movente ereditario, supponiamo che:

$a_3 \geq 0$, ovvero all'inizio del periodo 3 la ricchezza non può essere negativa (cioè il consumatore non può lasciare debiti);

$a_3 \leq 0$, ovvero all'inizio del periodo 3 la ricchezza non può essere positiva (cioè il consumatore non desidera lasciare eredità).

Combinando le due diseguaglianze, si nota immediatamente che la condizione terminale che si deve introdurre nel problema è:

$$a_3 = 0.$$

A sua volta, se a_3=0, la [3.3] comporta che $a_2 = c_2 - y_2$, e quindi che il vincolo di bilancio intertemporale (VBI) è:

$$c_1 + \frac{c_2}{1 + r_2} = a_1 + y_1 + \frac{y_2}{1 + r_2} = a_1 + h_1, \qquad [3.4]$$

dove h_1 è il capitale umano, cioè il valore scontato dei redditi da lavoro futuri. Abbiamo quindi ricavato il Vincolo di Bilancio Intertemporale utilizzando i due Vincoli di Bilancio Dinamici e la condizione terminale a_3=0.

Poiché abbiamo misurato la ricchezza all'inizio del periodo, il risparmio è dato da:

$$s_t = \frac{a_{t+1} - a_t}{1 + r_{t+1}} = \frac{r_{t+1}\, a_t}{1 + r_{t+1}} + y_t - c_t, \qquad [3.5]$$

ovvero dalla differenza tra reddito da capitale più reddito da lavoro e consumo. Il reddito da capitale viene diviso per $1 + r_{t+1}$ perché il reddito da interessi sarà ricevuto nel periodo $t + 1$, mentre a_t è misurato all'inizio del periodo t; per calcolare, quindi, il risparmio del periodo t occorre attualizzare il flusso del reddito da capitale.

Un’alternativa (in realtà meno frequente in letteratura) è quella di misurare la ricchezza alla fine del periodo, per cui:

$$a_t = (1+r_t)\ a_{t-1} + y_t - c_t\ .$$

In questo caso r_t è il tasso di interesse corrisposto su attività possedute dalla fine del periodo (t-1) alla fine del periodo t, quindi il risparmio sarà:

$$s_t = a_t - a_{t-1} = r_t\ a_{t-1} + y_t - c_t\ ,$$

dove $r_t\ a_{t-1}$ è nuovamente il reddito da capitale.

Nel caso in cui l’orizzonte di pianificazione del consumatore è di due soli periodi, il problema di ottimo è:

$$\begin{array}{ll} \max & u(c_1, c_2) \\ s.a. & c_1 + \dfrac{c_2}{1+r_2} = a_1 + h_1 \\ con & a_1 \quad dato \\ & a_3 = 0 \\ & c_1, c_2 > 0. \end{array}$$

Se la funzione di utilità è concava, si ha che $u_1 > 0, u_2 > 0, u_{11} < 0, u_{22} < 0.$ E’ immediato verificare che la condizione del primo ordine è:

$$\frac{u_1}{u_2} = (1+r_2)\ .$$

La soluzione del problema è illustrata graficamente nella Figura 3.1. Il termine $(1+r_2)$ rappresenta il prezzo del consumo di oggi in termini del consumo di domani. Infatti, se il risparmio aumenta di una unità, il consumatore ottiene $(1+r_2)$ unità domani.

La condizione del primo ordine, insieme al VBI, individua due funzioni di domanda:

$$\begin{array}{l} c_1{*} = f(r,\ a_1 + h_1) \\ c_2{*} = h(r,\ a_1 + h_1). \end{array}$$

dove, per semplicità, abbiamo posto $r = r_2$. Se aumenta la ricchezza, la linea di bilancio si sposta verso destra e ($c_1{*},\ c_2{*}$) aumentano. L’effetto del tasso di interesse è invece incerto, almeno per quanto riguarda il consumo del primo periodo. Il tasso di interesse, infatti, ha tre effetti distinti sul consumo:

Effetto reddito: se $c_1{*} < a_1 + y_1$ (se cioè il consumatore è un risparmiatore netto nel primo periodo), un aumento del tasso di interesse aumenta il reddito da capitale nel secondo periodo. In equilibrio, quindi, sia $c_1{*}$ che $c_2{*}$ tendono ad aumentare.

Effetto di sostituzione: in seguito all'aumento di r, aumenta il prezzo del consumo del primo periodo; il consumatore vorrà quindi ridurre c_1* a vantaggio di c_2*.

Effetto ricchezza: Il valore scontato del reddito si riduce; ciò provoca una caduta del consumo in entrambi i periodi (si noti che quando $y_2 = 0$, come nel modello con generazioni sovrapposte, questo effetto è assente).

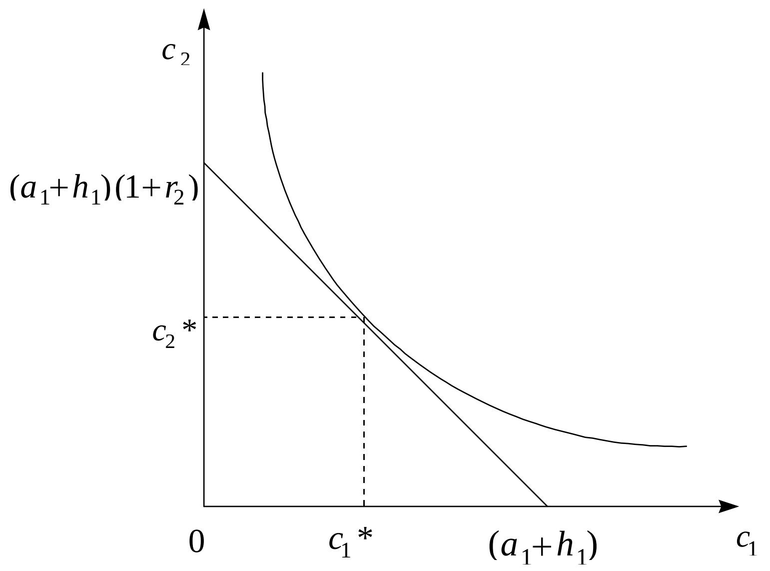

Figura 3.1. *Soluzione grafica del problema del consumatore in un modello a due periodi*

In sintesi l'effetto sostituzione e l'effetto ricchezza tendono a ridurre c_1*; l'effetto reddito tende invece a farlo aumentare; in generale, quindi, $\partial c_1*/\partial r \underset{\le}{\overset{\ge}{}} 0$. Se invece $c_1* > a_1 + y_1$ (cioè il consumatore è un debitore netto nel primo periodo) anche l'effetto reddito tende a ridurre c_1* perché il consumatore dovrà pagare più interessi nel secondo periodo. In questo caso quindi $\partial c_1*/\partial r < 0$. Gli studi empirici sulla relazione tra consumo ed interesse sono nel complesso deludenti e poco informativi. Forse chi desidera stimare l'effetto del tasso di interesse sul consumo potrebbe farlo con maggiore probabilità di successo in un campione di debitori netti.

Se la funzione di utilità è separabile, possiamo riscrivere la funzione obiettivo del consumatore come:

$$u(c_1, c_2) = u(c_1) + v(c_2) = u(c_1) + \frac{u(c_2)}{1+\delta},$$

dove δ è il tasso di preferenza intertemporale. L'ipotesi di separabilità intertemporale comporta che l'utilità marginale del consumo di oggi è indipendente dal consumo di domani, cioè $u'(c_t)$ è indipendente da c_s, $\forall\, t \neq s$. Nel caso di beni durevoli o habits l'utilità marginale dipende anche dal livello passato degli stock di beni durevoli o di habits, e quindi l'ipotesi di separabilità della funzione di utilità non sarebbe corretta. Nel corso del capitolo, tuttavia, continueremo a supporre che la funzione di utilità sia separabile.

Il problema del consumatore si semplifica come segue:

$$
\begin{aligned}
&\max \quad && u(c_1) + \frac{u(c_2)}{1+\delta} \\
&s.a. \quad && c_1 + \frac{c_2}{1+r} = a_1 + y_1 + \frac{y_2}{1+r} \\
&con \quad && a_1 \ \ dato \\
& && a_3 = 0. \\
& && c_1, c_2 > 0
\end{aligned}
$$

La funzione di Lagrange del problema è.

$$
\max_{c_1, c_2} \quad L = u(c_1) + \frac{u(c_2)}{1+\delta} + \mu\left[a_1 + y_1 + \frac{y_2}{1+r} - c_1 - \frac{c_2}{1+r}\right].
$$

Le condizioni del primo ordine sono:

$$
u'(c_1) = \mu \qquad [3.6]
$$

$$
u'(c_2) = \mu\left(\frac{1+\delta}{1+r}\right). \qquad [3.7]
$$

Nel caso di t periodi e con r costante avremo:

$$
u'(c_t) = \mu\left[\frac{(1+\delta)}{(1+r)}\right]^t . \qquad [3.8]
$$

Esaminiamo ora alcune caratteristiche della soluzione. La variabile μ misura l'utilità marginale di allentare il vincolo di una unità, cioè l'utilità marginale della ricchezza $(a_1 + h_1)$; le condizioni del primo ordine indicano che in equilibrio l'utilità marginale della ricchezza è costante. Se $r > \delta$, l'utilità marginale del consumo si riduce all'aumentare dell'età del consumatore e quindi c_t aumenta con l'età. Se, invece, $r = \delta$ l'utilità marginale ed il consumo sono costanti. Sostituendo la [3.6] nella [3.7] si ottiene l'equazione di Eulero:

$$
u'(c_1) = \frac{1+r}{1+\delta}\ u'(c_2) . \qquad [3.9]
$$

L'equazione indica che l'utilità marginale del consumo del primo periodo è uguale all'utilità marginale scontata del consumo del secondo periodo.

Prendendo i logaritmi dell'equazione [3.8], si ha:

$$\ln u'(c_t) = \ln \mu + t \ \ln\left(\frac{1+\delta}{1+r}\right);$$

derivando rispetto al tempo

$$c_t \ \frac{u''(c_t) \ dc/dt}{u'(c_t) \ c_t} = \ln\left(\frac{1+\delta}{1+r}\right) \approx \delta - r$$

si ottiene il tasso di crescita del consumo:

$$\frac{\dot{c}}{c} = -\frac{u'(c_t)}{c_t \ u''(c_t)} \ (r-\delta) = ESI \ (r-\delta).$$

L'elasticità di sostituzione intertemporale (ESI) misura di quanto aumenta il tasso di crescita del consumo in risposta ad un amento del tasso di interesse, cioè:

$$ESI = \frac{d \ \dot{c}/c}{d \ r}.$$

La ESI è quindi una misura dell'incentivo a sostituire il consumo tra diversi periodi, ed è quindi analoga all'elasticità di sostituzione tra due beni (x, y) in risposta ad una variazione percentuale del prezzo relativo. In questo caso avremo

$$\frac{d \ \ln(x/y)}{d \ \ln(p_x/p_y)},$$

ossia la variazione percentuale del rapporto tra la quantità dei due beni in risposta ad un aumento percentuale del prezzo relativo; si noti che nel nostro caso $p_x/p_y = (1+r)$.

3.6 Il problema del consumatore in tempo continuo e l'effetto del tasso di interesse

Consideriamo un consumatore che massimizza una funzione di utilità intertemporale. In ciascun periodo la funzione di utilità è isoelastica:

$$\begin{aligned} &\max \quad \int_t^T \frac{c_t^{\,1-\gamma}}{1-\gamma} e^{-\delta t} dt \\ &s.a. \quad \dot{a} = ra_t + w_t - c_t. \end{aligned}$$

Il vincolo di bilancio dinamico indica che la variazione della ricchezza del consumatore è pari alla differenza tra reddito (da capitale ra_t e da lavoro w_t) e consumo. La condizione terminale indica poi che il consumatore non può indebitarsi senza limiti:

$$a_T \geq 0 .$$

La funzione di Hamilton del problema è (per semplicità di notazione sopprimiamo l'indice t):

$$H = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} e^{-\delta t} + \mu [ra + w - c].$$

Le condizioni per la massimizzazione sono:

1. $H_c = 0$, ovvero $$e^{-\delta t} c^{-\gamma} = \mu ; \qquad [3.20]$$

2. $H_a = -\dot{\mu}$, ovvero $$r = -\frac{\dot{\mu}}{\mu}; \qquad [3.21]$$

3. $$\mu_T a_T = 0. \qquad [3.22]$$

Poiché dalla [3.20] risulta che $\mu_T = c_T{}^{-\gamma} e^{-\delta T} > 0$ ed essendo $c_T > 0$, la condizione di terminale può essere riscritta come $a_T = 0$ (ovvero il consumatore non desidera lasciare eredità). Per ottenere una soluzione esplicita, prendiamo il logaritmo della [3.20], sostituiamo il risultato nella [3.21] e deriviamo rispetto a t:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \gamma^{-1} (r - \delta) .$$

Il consumo cresce nel tempo se il tasso di interesse eccede il tasso di preferenza intertemporale e si riduce nel tempo nel caso opposto. Gli effetti sono tanto maggiori quanto maggiore è l'elasticità di sostituzione intertemporale. La soluzione dell'equazione differenziale è data da:

$$c_t = c_0 \, e^{\gamma^{-1}(r-\delta) t} .$$

Integrando il vincolo di bilancio dinamico $\dot{a} = ra + w - c$, è possibile derivare il vincolo di bilancio intertemporale. Moltiplicando il VBD per il fattore di integrazione e^{-rt}, e integrando da 0 a T, si ottiene:

$$\int_0^T e^{-rt} (\dot{a} - ra) dt = \int_0^T e^{-rt} w \, dt - \int_0^T e^{-rt} \, c \, dt . \qquad [3.23]$$

Poiché la primitiva di $e^{-rt} (\dot{a} - ra_t)$ è $a \, e^{-rt}$, la [3.23] può essere riscritta come:

$$a \, e^{-rt} \Big]_0^T = a_T \, e^{-rT} - a_0 = \int_0^T e^{-rt} w_t \, dt - \int_0^T e^{-rt} \, c_t \, dt = h_0 - \int_0^T e^{-rt} c_t \, dt . \qquad [3.24]$$

dove h_0 indica il valore scontato dei redditi da lavoro futuri (il capitale umano). Infine, utilizzando la condizione di trasversalità, si ottiene il vincolo di bilancio intertemporale:

$$\int_t^T e^{-rt}\, c_t\, dt = a_0 + h_0 . \qquad [3.25]$$

che indica, come in precedenza, che la somma dei consumi scontati è uguale alla somma della ricchezza iniziale e del capitale umano.

Sostituendo la soluzione del consumo $\left(c = c_0\, e^{\gamma^{-1}(r-\delta)\,t}\right)$ nel vincolo di bilancio intertemporale, risulta:

$$\int_0^T e^{-rt}\, c_0\, e^{\gamma^{-1}(r-\delta)\,t}\, dt = a_0 + h_0 .$$

Risolvendo:

$$\int_0^T c_0\, e^{\gamma^{-1}(r-\delta)\,t}\, e^{-rt} dt = a_0 + h_0 \ ,$$

da cui

$$c_0 \int_0^T e^{-\alpha t} dt = -\frac{e^{-\alpha T}}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} = \alpha^{-1}\left[1 - e^{-\alpha T}\right] c_0 \, ,$$

dove $\alpha = \left[r - \gamma^{-1}(r-\delta)\right] > 0$ per ipotesi.

La funzione del consumo è quindi:

$$c_0 = \frac{\alpha\left(a_0 + h_0\right)}{1 - e^{-\alpha T}} = \frac{\left[r - \gamma^{-1}(r-\delta)\right]\left(a_0 + h_0\right)}{1 - e^{-\left[r - \gamma^{-1}(r-\delta)\right]T}}$$

Si noti che la propensione marginale al consumo sulla ricchezza totale dipende da (r, γ, T, δ) ma non dal livello della ricchezza dell’individuo. Cerchiamo ora di stabilire l’effetto del tasso di interesse (r), delle preferenze (γ, δ) e dell’orizzonte di pianificazione sulla propensione al consumo.

Per valutare l'effetto di T, poniamo per semplicità $\gamma = 1$ e $r = 0$. In questo caso la propensione al consumo è pari a $\frac{\delta}{1-e^{-\delta T}}$, e quindi si riduce all'aumentare di T: gli anziani (individui con T basso) hanno cioè una propensione al consumo maggiore dei giovani (individui con T elevato).[1]

Consideriamo ora l'effetto degli altri parametri se $T \to \infty$ sulla propensione al consumo sulla ricchezza.

$\frac{\partial MPC}{\partial \delta} > 0$	la MPC è più elevata se l'individuo è impaziente;
$\frac{\partial MPC}{\partial \gamma^{-1}} < 0$	un aumento dell'elasticità di sostituzione intertemporale riduce la propensione al consumo;
$\frac{\partial MPC}{\partial r} \gtreqless 0$	se $\gamma^{-1} = 1$, MPC $= \delta$ e quindi il tasso d'interesse non influenza MPC (è il caso dell'utilità logaritmica);
	se $\gamma^{-1} > 1$, l'effetto sostituzione domina l'effetto reddito e la derivata è positiva;
	se $\gamma^{-1} < 1$, l'effetto reddito domina l'effetto sostituzione e la derivata è negativa;
	se $\gamma^{-1} = 0$, MPC$= r$; in questo caso esiste solo un effetto reddito (non vi è alcuna possibilità di sostituire consumo presente con consumo futuro).

E' opportuno ricordare che un aumento di r, oltre ad influenzare la propensione marginale al consumo sulla ricchezza, riduce anche il valore del capitale umano (h_0). Questa è la ragione per cui molti economisti ritengono che un aumento di r dovrebbe ridurre il consumo corrente. Ma in tal senso non esiste, al momento, alcuna conferma empirica.

Infine, se è noto il profilo del reddito da lavoro, è possibile ottenere un'espressione esplicita per h_0. Ad esempio se $w_t = w$ per $t = 0 \ldots N$, e $w_t = 0$ per $t > N$, $h_0 = Nw$ (come nell'ipotesi del ciclo vitale).

Un altro caso, importante per il rilievo che assume in letteratura, è quello per cui l'orizzonte è infinito e $r = \delta$:

$$c_0 = r\left(a_0 + h_0\right) = y^p .$$

---

[1] Si noti che quando $T \to \infty$, la condizione terminale $a_T = 0$ deve essere modificata in $\lim_{t\to\infty} a_t e^{-rt} = 0$.

Il consumo è cioè pari al tasso di interesse reale moltiplicato la ricchezza complessiva del consumatore, cioè a quella parte della ricchezza che può essere consumata indefinitamente senza modificare il valore della ricchezza stessa (una rendita perpetua). Il consumo è cioè uguale al reddito permanente.