CAPITOLO 4

MODELLI CON ORIZZONTE INFINITO

Il modello che studiamo in questo capitolo è un modello di equilibrio economico generale, in cui cioè vengono determinati i prezzi dei fattori produttivi, oltre che le quantità domandate da consumatori e imprese. Supporremo che:

- i consumatori massimizzano l'utilità;
- le imprese massimizzano i profitti;
- l'orizzonte di pianificazione degli individui è infinito;
- ciascun mercato opera in condizioni di concorrenza perfetta;
- viene prodotto e consumato un solo bene omogeneo.

4.1 Le imprese

Le imprese producono un bene omogeneo utilizzando una funzione di produzione omogenea di grado 1 (cioè a rendimenti di scala costanti) del tipo:

$$Y_t = F(K_t, N_t),$$

dove Y_t rappresenta la produzione, K_t lo stock di capitale e N_t la forza-lavoro impiegata.

In equilibrio la produzione è uguale alla domanda. In un'economia chiusa e senza settore pubblico, la domanda è uguale alla somma di consumi ed investimenti: $Y_t = C_t + I_t$. Supponendo che non vi sia ammortamento del capitale ($\lambda = 0$), l'investimento è pari alla variazione dello stock di capitale, $I = \dot{K}$; avremo quindi:

$$Y_t = C_t + \dot{K}_t, \qquad [4.1]$$

Il tasso di crescita della forza lavoro è:

$$\frac{d N_t / dt}{N_t} = \frac{\dot{N}_t}{N_t} = n .$$

Dividendo per N_t possiamo riscrivere la [4.1] in termini pro-capite

$$\frac{Y_t}{N_t} = F\left(\frac{K_t}{N_t},\ 1\right) = \frac{C_t}{N_t} + \frac{\dot{K}_t}{N_t} ,$$

ossia

$$y_t = c_t + \dot{k}_t + n k_t . \qquad [4.2]$$

Per ottenere la [4.2], si ponga $K_t = k_t N_t$. Differenziando rispetto al tempo risulta:

$$\dot{K}_t = \dot{k}_t N_t + k_t \dot{N}_t .$$

Infine, dividendo per N_t si ottiene:

$$\frac{\left(\dot{k}_t N_t + k_t \dot{N}_t\right)}{N_t} = \dot{k}_t + n k_t .$$

L'equazione [4.2] indica che il prodotto per addetto $\left[y_t = f\left(k_t\right)\right]$ è pari al consumo per addetto (c_t) più l'investimento per addetto; a sua volta quest'ultimo è uguale alla somma dell'incremento di capitale necessario a sostenere l'incremento della forza lavoro (nk_t) e lo stock di capitale che si aggiunge a quello già esistente ($\dot{k}_t$).

4.2 I consumatori

Supporremo che gli individui pianifichino le proprie scelte come se si attendessero di vivere per sempre. Come vedremo nel cap. 5, questa ipotesi può essere giustificata supponendo che ciascun consumatore tenga conto, oltre che della propria utilità, anche del benessere delle generazioni future. I consumatori massimizzano la seguente funzione di utilità:

$$\int_0^\infty u\left(c_t\right) e^{-\delta t} dt ,$$

in cui $u\left(c_t\right)$ è l'utilità in ciascun periodo e δ il saggio di preferenza intertemporale, una misura del grado di impazienza dei consumatori. Quanto più δ è elevato, tanto minore è l'importanza che gli individui assegnano all'utilità del consumo futuro.

4.3 *Soluzione del modello da parte di un pianificatore*

Supponiamo inizialmente che tutte le decisioni siano prese da un pianificatore centrale. Verificheremo successivamente che la soluzione del modello da parte di un pianificatore coincide con quella di un'economia di mercato, cioè di un'economia in cui le decisioni vengono prese, separatamente, da consumatori e imprese. Il problema del pianificatore, per primo studiato da Ramsey, è di trovare una sequenza di valori per il consumo di un individuo rappresentativo, soggetto ad un vincolo di bilancio dinamico delle risorse e ad un certo livello di capitale iniziale:

$$
\begin{aligned}
&Max \int_0^{\infty} u(c_t)\, e^{-\delta t} dt \\
&s.a. \quad f(k_t) = c_t + \dot{k}_t + n\, k_t \\
&e \qquad k_0 \quad dato, \\
&\qquad\; k_t,\; c_t > 0 \qquad \forall t \\
&\qquad\; \lambda = 0 \quad (\textit{non vi è ammortamento}).
\end{aligned}
$$

Il consumo pro-capite è la variabile di controllo (il pianificatore può scegliere una determinata sequenza di consumo); il capitale pro-capite, invece, è la variabile di stato (descrive l'evoluzione del sistema economico).

Il problema si risolve scrivendo la funzione di Hamilton:

$$H = u(c_t)\, e^{-\delta t} + \mu \left[f(k_t) - c_t - n\, k_t \right],$$

in cui μ rappresenta l'incremento di utilità che si verifica in seguito all'aumento di un'unità dell'investimento (si noti che $\mu = dH \big/ d\dot{k}_t$). Per questa ragione, μ è anche noto come "prezzo-ombra" dell'investimento. La funzione H misura l'utilità complessiva del consumatore; questi ricava utilità dal consumo (primo termine del secondo membro) e da un aumento dello stock di capitale (secondo termine del secondo membro). Se $\dot{k} = 0$, la funzione di Hamilton coincide esattamente con l'utilità del consumo.

Le condizioni del primo ordine sono:

$$H_{c_t} = 0 \tag{4.3}$$

$$H_{k_t} = -\dot{\mu} = \mu \left[f'(k) - n \right] \tag{4.4}$$

$$\lim_{t \to \infty} \left(k_t\, \mu_t \right) = 0 \tag{4.5}$$

L'ultima condizione è detta "condizione di trasversalità" e indica che quando $t \to \infty$ il valore dello stock di capitale pro-capite è nullo (una condizione necessaria per la massimizzazione dell'utilità). Intuitivamente, non conviene al consumatore detenere capitale per $t \to \infty$, perché potrebbe aumentare la propria utilità consumando lo stock di capitale (nel caso di orizzonte finito la condizione di trasversalità è $a_T = 0$). Per risolvere il problema, supporremo che l'utilità sia isoelastica, ovvero:

$$u(c_t) = \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma},$$

dove $\gamma = -\ c_t\ u''(c_t) / u'(c_t)$ è l'elasticità (costante) dell'utilità marginale del consumo e γ^{-1} l'elasticità di sostituzione intertemporale. Un'elevata elasticità di sostituzione intertemporale indica che i consumatori sono disposti a sostituire consumo corrente con consumo futuro. Ricordiamo che quando γ^{-1} tende ad 1, $u(c_t) = \ln c_t$; se invece $\gamma^{-1} \to \infty$, la funzione di utilità è lineare, $u(c_t) = c_t$.

Nel caso di utilità isoelastica, le condizioni del primo ordine per la massimizzazione si riducono a:

$$H_{c_t} = 0 \qquad \textit{ovvero} \qquad e^{-\delta t} c_t^{-\gamma} = \mu \tag{4.6}$$

$$H_{k_t} = -\dot{\mu} \qquad \textit{ovvero} \qquad \mu[f'(k_t) - n] = -\dot{\mu} \tag{4.7}$$

$$\lim_{t\to\infty} k_t\ \mu_t = 0 \tag{4.8}$$

Interpretiamo queste condizioni. La [4.6] indica che l'utilità marginale del consumo è uguale all'utilità marginale dell'investimento: lungo il sentiero di ottimo il consumatore è indifferente tra consumare una unità addizionale oggi oppure investire un'unità addizionale oggi e consumare domani. L'interpretazione della [4.7] è leggermente più complessa. Riscriviamo la [4.6] dopo aver preso i logaritmi di entrambi i membri:

$$-\delta t - \gamma \ln c_t = \ln \mu.$$

Derivando rispetto al tempo, riordinando i termini e utilizzando la [4.7] per sostituire $-\frac{\dot{\mu}}{\mu}$, si ottiene:

$$\delta + \gamma \frac{\dot{c}}{c} = -\frac{\dot{\mu}}{\mu} = \left[f'(k_t) - n \right]. \tag{4.9}$$

La [4.9] può essere ora agevolmente interpretata: il primo membro dell'uguaglianza rappresenta il beneficio che deriva dal consumo di un'unita addizionale oggi; esso è pari alla somma del tasso di preferenza intertemporale e del termine $\gamma\ \dot{c}_t / c_t$. Quest'ultimo è tanto maggiore quanto più bassa è l'elasticità di sostituzione intertemporale, ossia la disponibilità a sostituire consumo presente con consumo futuro. Il secondo membro della [4.11] rappresenta invece il "costo del consumo", ossia la perdita che si subisce nel consumare oggi una unità addizionale del bene. La rinuncia ad una unità di consumo presente consente infatti di trasferire $\left[f'(k_t) - n \right]$ unità nel periodo successivo. La funzione di produzione *f(k)* è la tecnologia che consente di trasformare una unità di consumo corrente in $f'(k_t)$ unità di consumo future. A queste unità occorre però sottrarre n, il numero di unità di consumo necessarie a dotare di capitale i nuovi occupati.

Dalla [4.9] è anche possibile calcolare il tasso di crescita ottimale del consumo (per semplicità di notazione, eliminiamo l'indice temporale):

$$\frac{\dot{c}}{c} = \gamma^{-1}\left[f'(k) - n - \delta \right], \qquad [4.10]$$

che è anche nota come regola di Ramsey-Keynes. La regola stabilisce che il consumo cresce solo se la produttività marginale del capitale è maggiore del tasso di preferenza intertemporale, ossia se $\left[f'(k_t) - n \right] > \delta$. Infatti, se la produttività marginale del capitale è elevata, lo stock di capitale è basso: sarà dunque ottimale comprimere il consumo corrente (e investire di più oggi) a favore di un aumento del consumo futuro. Come osservato nel capitolo 3, il tasso di crescita del consumo è direttamente legato all'elasticità di sostituzione intertemporale γ^{-1}: se γ^{-1} cresce il consumatore è più propenso a sostituire consumo corrente con consumo futuro, e quindi il tasso di crescita del consumo aumenta. L'unica differenza con il modello delle scelte intertemporali è il fatto che in un modello di equilibrio economico generale il tasso di interesse è pari alla produttività marginale del capitale.

4.4 La dinamica del modello

La soluzione del modello è data da un sistema di due equazioni differenziali:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \eta\left[f'(k) - n - \delta \right] \qquad [4.11]$$

$$\dot{k} = f(k) - c - nk \qquad [4.12]$$

che indicano come variano, rispettivamente, il consumo e lo stock di capitale lungo il sentiero ottimo. In stato stazionario risulta:

$\dot{c} = \dot{k} = 0$,

e quindi

$$f'(k) = n + \delta \qquad [4.13]$$

$$c = f(k) - nk \, . \qquad [4.14]$$

La [4.14] rappresenta la condizione di equilibrio tra produzione per addetto e domanda aggregata per addetto. La [4.13] è la *golden rule* modificata per tener conto del tasso di preferenza intertemporale. Infatti, un incremento del tasso di preferenza intertemporale aumenta il consumo corrente a spese dell'investimento corrente e dunque del consumo futuro. Quindi lo stock di capitale di stato stazionario (di questo modello) è inferiore a quello determinato dalla regola aurea ($k^* < k^{GOLD}$, Figura 4.1), a meno che $\delta = 0$.

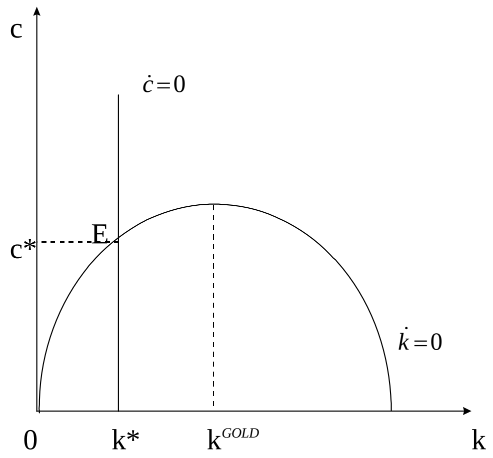

Figura 4.1. Equilibrio di stato stazionario nel modello di Ramsey

Possiamo ora rappresentare graficamente l'equilibrio del modello di Ramsey. In Figura 4.1 costruiamo un diagramma di fase nello spazio [k, c], e rappresentiamo il luogo geometrico dei punti in corrispondenza dei quali $\dot{c} = 0$ e $\dot{k} = 0$.

Cominciamo con il considerare $\dot{k} = 0$; dalla [4.16] si nota che questa condizione si verifica solo se $c = f(k) - nk$. La curva che rappresenta tale equazione parte dall'origine (perché quando $k = 0$ anche $c = 0$), raggiunge un massimo in corrispondenza dello stock di capitale pro-capite (k^{GOLD}) che assicura il rispetto della regola aurea (ossia $f'(k) = n$), e interseca l'asse delle ascisse quando $f(k) = nk$.

La condizione ($\dot{c} = 0$) è rispettata solo se vale la regola aurea modificata, ovvero $f'(k) = n + \delta$. Il luogo geometrico dei punti in corrispondenza dei quali $\dot{c} = 0$ è dato quindi dalla retta di equazione $k = k^*$, individuata dalla regola aurea modificata.

Il punto di equilibrio di stato stazionario del sistema è *E*, cioè l'intersezione delle due curve della Figura 4.1, in cui:

$$c^* = f(k^*) - n k^*.$$

Le Figure 4.2 e 4.3 permettono di analizzare separatamente la dinamica di k e di c al di fuori del punto di equilibrio; tale dinamica dipende dal segno di $\dot{k}$ e di $\dot{c}$. Ricordando che $\dot{k} = f(k) - c - nk$, si ha che:

se $\quad f(k)-c-nk>0$, allora $\dot{k}>0$;

se $\quad f(k)-c-nk<0$, allora $\dot{k}<0$.

Osservando la Figura 4.2, si nota che $\dot{k}=0$ nel punto A: le scelte di consumo sono tali da assicurare l'impiego di una certa quantità di risorse per il mantenimento di un livello di capitale per addetto costante. Nel punto B il consumo è maggiore di quello che consentirebbe di mantenere costante nel tempo il livello del capitale per addetto, e quindi gli investimenti insufficienti; ne segue che lo stock di capitale si riduce ($\dot{k}<0$). Come mostrato dalle frecce, in tutti i punti al di sopra della curva $\dot{k}=0$, k si riduce. Con un ragionamento analogo si può dimostrare, invece, che in tutti i punti al di sotto di $\dot{k}=0$, k aumenta ($\dot{k}>0$).

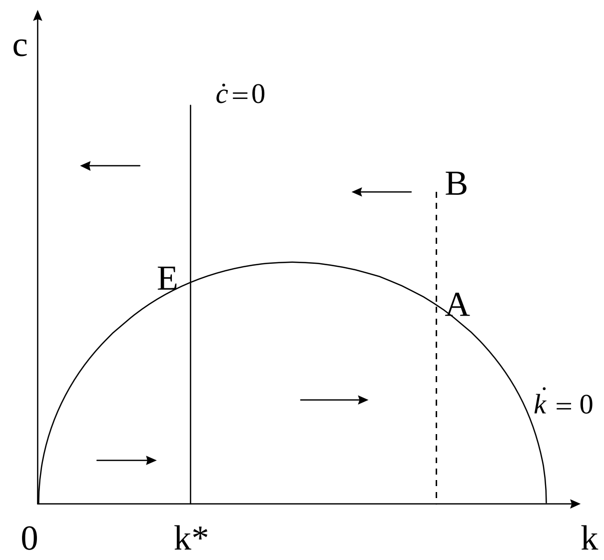

Figura 4.2. Dinamica dello stock di capitale nel modello di Ramsey

Analizziamo, adesso, la dinamica del consumo per addetto in Figura 4.3. Nel punto C il consumo è costante ($\dot{c}=0$), ovvero lo stock di capitale è tale da assicurare una produttività marginale che rispetta la regola aurea modificata e, quindi, mantenere il consumo per addetto costante nel tempo. Nel punto D, invece, lo stock di capitale è troppo elevato, ovvero la sua produttività troppo bassa, per il livello di consumo esistente. Per mantenere il livello di k, sarà quindi necessario ridurre nel tempo il consumo ($\dot{c}<0$), secondo quanto descritto dalle frecce. A sinistra di $\dot{c}=0$ il consumo tende invece ad aumentare.

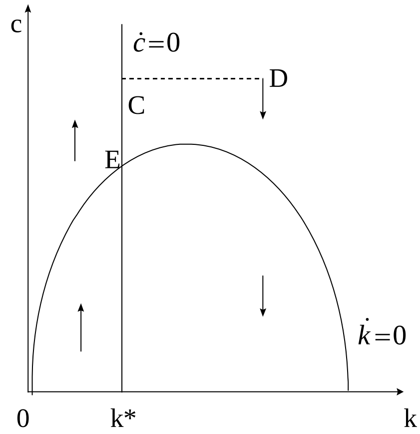

Figura 4.3. Dinamica del consumo nel modello di Ramsey

Nella Figura 4.4 rappresentiamo insieme i grafici 4.2 e 4.3, così da studiare la dinamica del modello. Avendo posto $c,\ k > 0 \quad \forall t$, l'unica soluzione di equilibrio di stato stazionario è il punto E, in corrispondenza del quale $k = k^*$ e $c = c^*$. Il punto E è l'unico punto di equilibrio di un sentiero dinamico. Ogni deviazione da questo sentiero ci allontana per sempre dai valori di equilibrio stazionario k^* e c^*. Ad esempio, se l'economia si trova nel punto W, non esiste alcun sentiero del consumo che ci possa condurre al punto E. Infatti, nel punto W il consumo tende a crescere e lo stock di capitale tende a ridursi e ci allontaneremo per sempre dall'equilibrio. L'unico sentiero di equilibrio è costituito quindi dal sentiero FG.

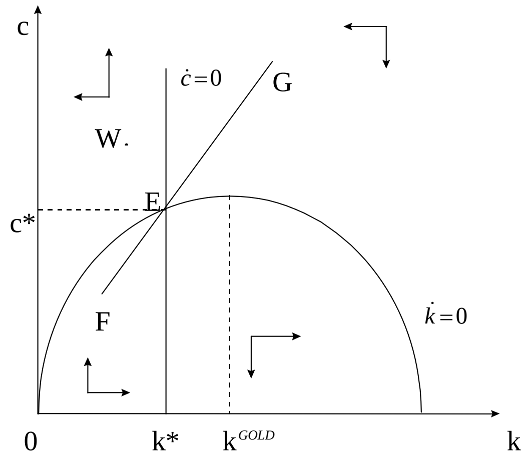

Figura 4.4. Dinamica del modello di Ramsey

Come esempio consideriamo una funzione di produzione $f(k) = k^{\alpha}$. La [4.11] diventa

$$\frac{\dot{c}}{c} = \gamma^{-1}\left[f'(k) - n - \delta \right] = \gamma^{-1}\left[\alpha\, k^{\alpha-1} - n - \delta \right].$$

In stato stazionario $\left(\dot{c}/c = 0\right)$ si ha

$$\alpha\, k^{\alpha-1} = n + \delta\,,$$

da cui

$$k^* = \left[\frac{\alpha}{n+\delta} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Con $\alpha = 0.3$, $n = 0.02$, $\delta = 0.01$, $k^* = 26.8$.

4.5 Economia di mercato

La soluzione del modello di Ramsey in un'economia con un pianificatore centrale coincide con la soluzione del modello nel caso in cui le decisioni vengono prese da agenti economici (imprese e famiglie) invece che da un pianificatore centrale. Supponiamo quindi che esista un mercato dei beni, del lavoro e del capitale in cui operano un gran numero di imprese e di consumatori. Per semplicità supponiamo che la forza lavoro sia costante nel tempo ($n = 0$).

Il consumatore rappresentativo risolve il problema

$$\begin{aligned} & Max \int_0^\infty u(c)\, e^{-\delta t}\, dt \\ & s.a. \quad \dot{a} = w + ra - c \end{aligned}$$

in cui w è il reddito da lavoro, ra il reddito da interessi sulla ricchezza, c il consumo. Il vincolo di bilancio dinamico indica che in ciascun periodo il reddito disponibile del consumatore può essere destinato al consumo o all'accumulazione di ricchezza ($\dot{a}$).

L'impresa rappresentativa massimizza la differenza tra ricavi e costi di produzione:

$$Max\ \ \pi = F\left(K, N\right) - \left(wN + rK\right),$$

ove w è il salario reale ed r il costo del capitale. Per semplicità si è supposto che il prezzo del bene sia unitario. Dividendo per la forza lavoro:

$$Max\ \ \pi = f(k) - \left(w + rk\right).$$

Le condizioni del primo ordine sono:

$$r = f'(k), \qquad [4.15]$$

$$w = f(k) - f'(k)k. \qquad [4.16]$$

In equilibrio, la ricchezza dei consumatori deve essere uguale allo stock di capitale, $a = k$, e quindi:

$$w + rk - c = \dot{k}. \qquad [4.17]$$

Sostituendo la [4.15] e la [4.16] nella [4.17], si ha:

$$\underline{\dot{k}} = rk + w - c = f'(k)k + f(k) - f'(k)k - c = f(k) - c,$$

ossia lo stesso vincolo di bilancio del pianificatore centrale (nel caso in cui $n = 0$). Poiché i due vincoli sono identici, anche la soluzione sarà identica: l'allocazione delle risorse in un'economia con mercati competitivi è la stessa di quella scelta da un pianificatore che massimizza l'utilità di un consumatore rappresentativo soggetto ad un vincolo delle risorse.

4.8 Crescita endogena nel modello di Ramsey

Il problema della crescita endogena nel modello di Ramsey è stato esaminato da numerosi autori, tra i quali Romer (1986), Rebelo (1990) e Barro (1990). In questo paragrafo analizzeremo, in particolare, un modello proposto da Rebelo, il quale suppone che la produzione sia una funzione lineare dello stock di capitale per addetto:

$$y = f(k) = Ak.$$

Il pianificatore massimizza l'utilità di un consumatore rappresentativo (che per semplicità supponiamo isoelastica) avendo per unico vincolo le risorse dell'economia:

$$Max \int_0^{\infty} \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} \; e^{-\delta t} dt$$

$$s.a. \quad Ak = \dot{k} + c,$$

in cui abbiamo anche supposto $n = 0$. Per risolvere il problema scriviamo la funzione di Hamilton:

$$H = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} \; e^{-\delta t} + \mu[Ak - c].$$

Le condizioni del primo ordine sono:

$$H_c = 0 \qquad \Rightarrow \qquad c^{-\gamma} \; e^{-\delta t} \qquad [4.26]$$

$$H_k = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A = -\frac{\dot{\mu}}{\mu} \tag{4.27}$$

$$\lim_{t\to\infty} k_t \mu_t = 0 \,. \tag{4.28}$$

Prendendo i logaritmi della [4.26] e derivando rispetto al tempo la [4.26], e sostituendo la [4.27], si ottiene il tasso di crescita del consumo:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \gamma^{-1}\left(A-\delta\right).$$

La caratteristica di questo modello è data dal fatto che, contrariamente a quanto supposto in precedenza, la produttività marginale del capitale non è più decrescente ma costante nel tempo.

Per calcolare il tasso di crescita, dividiamo ambo i membri del vincolo di bilancio $\dot{k} = Ak - c$ per lo stock di capitale pro-capite. Avremo:

$$\frac{\dot{k}}{k} = A - \frac{c}{k} = \gamma^{-1}\left(A-\delta\right) = \rho \,, \tag{4.29}$$

in cui ρ rappresenta il saggio di crescita. La [4.29] indica che lungo un sentiero di crescita bilanciato, il capitale deve crescere allo stesso tasso del consumo (cioè il rapporto tra consumo e stock di capitale è costante). La crescita è tanto più elevata quanto maggiore la produttività marginale del capitale e l'elasticità di sostituzione intertemporale, e tanto minore il tasso di preferenza intertemporale.

Esaminiamo infine la relazione tra risparmio e crescita. Il saggio di risparmio dell'economia è dato da:

$$s = \frac{S}{Y} = \frac{\dot{k}}{y} = \frac{\dot{k}}{Ak} = \frac{\gamma^{-1}\left(A-\delta\right)}{A}.$$

L'equazione indica che il saggio di risparmio di un'economia è tanto più elevato quanto maggiore è il tasso di crescita $\gamma^{-1}\left(A-\delta\right)$. La relazione può anche scriversi come:

$$\frac{\dot{k}}{k} = sA \,,$$

che sottolinea che il tasso di crescita è uguale al prodotto tra tasso di risparmio e produttività marginale del capitale A. In questo modello politiche in grado di stimolare il saggio di risparmio e la produttività marginale del capitale sono cioè in grado di influenzare positivamente il tasso di crescita di lungo periodo di un sistema economico.