CAPITOLO 1

LA FUNZIONE DI PRODUZIONE E LA CRESCITA ECONOMICA

1.1 La funzione di produzione

Data una funzione di produzione in cui la quantità prodotta (*Y*) dipende dalla quantità di capitale (*K*) e di lavoro (*N*) impiegate nel processo produttivo

$$Y = F(K,N),$$

con $F_K > 0$, $F_N > 0$, $F_{KK} < 0$, $F_{NN} < 0$, la funzione si dice omogenea di grado ρ se:

$$F(\lambda K, \lambda N) = \lambda^{\rho} Y \ .$$

Nel caso in cui $\rho = 1$, la funzione di produzione si dice a rendimenti di scala costanti. In questo caso è possibile esprimere la funzione di produzione unicamente in termini del rapporto capitale-lavoro

$$F\left(\frac{K}{N}, 1\right) = f(k) = y \,,$$

dove $k = K/N$ e $y = Y/N$.

Ne segue che le produttività marginali del lavoro e del capitale sono esclusivamente funzione di *k*. Infatti

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = f'(k) \,,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial N} = \frac{\partial \left[N f\left(\frac{K}{N}\right)\right]}{\partial N} = f(k) - k f'(k).$$

Inoltre, se i rendimenti di scala sono costanti ($\rho = 1$), vale il teorema di Eulero:

$$Y = KF_K + NF_N$$

Supponiamo che in ogni periodo lo stock di capitale utilizzato nella produzione si deprezzi di una frazione costante $\lambda \geq 0$. La produzione lorda dell'impresa è quindi $Y = F(K, N)$, mentre *Y=F(K, N)-* λK rappresenta la produzione netta. Esse coincidono solo nel caso di assenza di ammortamento, ossia quando $\lambda = 0$.

L'impresa massimizza i profitti, cioè la produzione netta meno il costo del lavoro ed il costo del capitale:

$$\Pi = F(K, N) - wN - rK - \lambda K \tag{1.1}$$

in cui il prezzo del prodotto è posto pari a 1, w è il costo del lavoro e r il costo del capitale. Le condizioni del primo ordine sono:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial K} = 0 \Rightarrow F_K = (r + \lambda)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial N} = 0 \Rightarrow F_N = w$$

L'impresa sceglie quindi la quantità di lavoro e di capitale uguagliando le due produttività marginali ai rispettivi prezzi dei fattori. Spesso sarà utile considerare i due casi particolari di ammortamento completo ($\lambda = 1$) e di assenza di ammortamento ($\lambda = 0$). Nel primo caso $F_K = (1 + r)$, mentre nel caso di assenza di ammortamento $F_K = r$

Nel caso di una funzione di produzione con rendimenti di scala costanti, il problema di massimizzazione (1.1) può essere anche espresso in funzione del solo capitale per addetto:

$$\max_k f(k) - w - (r + \lambda)k \tag{1.2}$$

da cui:

$$f'(k) = (r + \lambda)$$

il prodotto marginale per addetto è uguale alla somma del costo del capitale e del tasso di ammortamento. Se i rendimenti di scala sono costanti, l'impresa può quindi limitarsi a scegliere un certo rapporto capitale-lavoro piuttosto che scegliere separatamente le quantità dei fattori produttivi K e N. Utilizzando il teorema di Eulero, e ponendo la produttività marginale del lavoro uguale al costo del lavoro, si ottiene :

$$y = kF_K + F_N = k f'(k) + w,$$

cioè

$$w = f(k) - k f'(k).$$

Esempio. La funzione di produzione Cobb-Douglas

La funzione $Y = AK^{\alpha} N^{\beta}$ è omogenea di grado $\alpha + \beta$. Nel caso in cui $\alpha + \beta = 1$ e $\lambda = 0$ è facile verificare che le produttività marginali e i prodotti medi dipendono solo da $k = K/N$:

$$\frac{Y}{N} = \frac{AK^{\alpha} N^{1-\alpha}}{N} = Ak^{\alpha},$$

$$\frac{Y}{K} = \frac{AK^{\alpha} N^{1-\alpha}}{K} = Ak^{\alpha-1},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial N} = (1-\alpha)\, AK^{\alpha} N^{-\alpha} = (1-\alpha)\, Ak^{\alpha},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha\, AK^{\alpha-1} N^{1-\alpha} = \alpha\, Ak^{\alpha-1}.$$

La funzione di produzione può quindi essere espressa come

$$y = A k^{\alpha}.$$

Verifichiamo che vale il teorema di Eulero:

$$Y = F_K K + F_N N = \alpha\, AK^{\alpha} N^{1-\alpha} + (1-\alpha)\, AK^{\alpha} N^{1-\alpha} = Y$$

o anche

$$y = F_K \qquad k + F_N = f'(k)k + f(k) - f'(k)k = f(k).$$

Dalla contabilità nazionale sappiamo che $Y = Kr + wN$, cioè che il reddito nazionale è uguale alla somma del reddito da capitale e del reddito da lavoro. Se le imprese massimizzano i profitti, e se ora la produzione aggregata è descritta da una funzione di produzione Cobb-Douglas, i parametri α e $(1-\alpha)$ possono essere interpretati come le quote, rispettivamente, del reddito da capitale e del reddito da lavoro sul reddito nazionale

$$\frac{Kr}{Y} = \frac{K \;\; \alpha \;\; A \;\; K^{\alpha-1} N^{1-\alpha}}{Y} = \alpha,$$

$$\frac{Nw}{Y} = \frac{N(1-\alpha)\, AK^{\alpha} N^{-\alpha}}{Y} = (1-\alpha)\,.$$

Nel caso di una funzione di produzione Cobb-Douglas, le condizioni del primo ordine per la massimizzazione dei profitti sono:

$$\lambda + r = f'(k) = \alpha A k^{\alpha-1}\,,$$

$$w = f(k) - f'(k)k = (1-\alpha)\, Ak\,.$$

1.2 La crescita economica

Piuttosto che studiare le fluttuazioni cicliche del sistema economico, in queste lezioni ci concentreremo principalmente sulle determinanti di lungo periodo della crescita economica. Un modo per comprendere l'importanza del tasso di crescita di lungo periodo del sistema economico é quello di calcolare il tempo necessario a raddoppiare il reddito nazionale in funzione del tasso di crescita ρ:

$$Ye^{\rho t} = 2Y\,,$$

ossia

$$t^* = \frac{\ln 2}{\rho}\,.$$

Ad esempio, se $\rho = 0.01$, $t^* = 69$, e quindi il reddito raddoppia ogni 69 anni; se $\rho = 0.03$, $t^* = 23$; se infine l'economia cresce al tasso $\rho = 0.05$, il reddito nazionale raddoppia ogni 14 anni. E' evidente che si tratta di differenze enormi.

Verifichiamo ora che se una funzione di produzione è omogenea di grado 1, il tasso di crescita del reddito nazionale è pari alla somma del tasso di crescita della forza lavoro e del tasso di crescita dello stock di capitale, con pesi dati dalle rispettive quote sul reddito nazionale. Consideriamo anche che la produzione aumenta, oltre che per effetto di un aumento dello stock di capitale e della quantitá di lavoro, anche per effetto del progresso tecnico. La funzione di produzione é quindi:

$$Y_t = F\left(K_t, N_t, t\right) = F\left(K_t, A(t) N_t\right),$$

dove abbiamo supposto che il progresso tecnico $A(t)$ è incorporato nel fattore lavoro.

Derivando la funzione di produzione rispetto al tempo si ottiene:

$$\dot{Y} = \frac{\partial Y}{\partial K}\dot{K} + \frac{\partial Y}{\partial N}\dot{N} + \frac{\partial Y}{\partial A}\dot{A},$$

dividendo per Y si ottiene

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\partial Y}{\partial K}\frac{\dot{K}}{K}\frac{K}{Y} + \frac{\partial Y}{\partial N}\frac{\dot{N}}{N}\frac{N}{Y} + \frac{\partial Y}{\partial A}\frac{\dot{A}}{A}\frac{A}{Y} \qquad [1.3]$$

Se i mercati sono concorrenziali, le produttività marginali sono uguali ai prezzi dei fattori produttivi:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{rK}{Y}\frac{\dot{K}}{K} + \frac{wN}{Y}\frac{\dot{N}}{N} + \sigma = \alpha\frac{\dot{K}}{K} + (1-\alpha)\frac{\dot{N}}{N} + \sigma, \qquad [1.4]$$

dove $\frac{rK}{Y} = \alpha$ e $\frac{wN}{Y} = (1-\alpha)$ rappresentano le quote dei redditi dei fattori produttivi sul reddito nazionale, e il simbolo σ indica il residuo di Solow, cioè la parte della crescita che non può essere attribuita né al fattore capitale né al fattore lavoro.

Si noti che l'equazione [1.3] è sempre valida; l'equazione [1.4] vale invece solo se i mercati sono concorrenziali.

L'equazione [1.4] può essere riscritta come:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{N}}{N} = \alpha\left(\frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{N}}{N}\right) + \sigma \qquad [1.5]$$

che esprime il tasso di crescita del reddito per addetto in funzione del tasso di crescita del capitale per addetto.

L'equazione [1.5] definisce implicitamente il progresso tecnico come la differenza tra il tasso di crescita del reddito per addetto e il tasso di crescita del capitale per addetto

$$\sigma = \frac{\dot{y}}{y} - \alpha \left(\frac{\dot{k}}{k}\right).$$

Solow verificò che nel periodo 1910-1950 negli Stati Uniti il progresso tecnico (o residuo di Solow) aveva rappresentato la componente principale della crescita del reddito per addetto.

Nel caso di una funzione di produzione Cobb-Douglas con progresso tecnico incorporato nel fattore lavoro:

$$Y_t = A K_t^{\alpha} \left(N_t e^{gt}\right)^{1-\alpha}; \qquad [1.6]$$

il tasso di crescita della produzione può essere agevolmente calcolato prendendo i logaritmi della [1.6]

$$\ln Y = \ln A + \alpha \ln K + (1-\alpha)\ln N + (1-\alpha)\, gt$$

e derivando rispetto al tempo

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \alpha \frac{\dot{K}}{K} + (1-\alpha)\, n + (1-\alpha)\, g\, ; \qquad [1.7]$$

per ottenere la [1.7] abbiamo supposto che il tasso di crescita della forza lavoro sia costante e pari a n.

Lungo un sentiero di crescita di equilibrio, il capitale cresce allo stesso tasso del reddito. Indichiamo con il termine ρ questo tasso comune. La [1.7] può dunque riscriversi come:

$$\rho = \alpha\rho + (1-\alpha)n + (1-\alpha)g\ ,$$

e risolvendo in funzione di ρ:

$$\rho = n + g \qquad [1.8]$$

La [1.8] mostra che nel lungo periodo il tasso di crescita del sistema economico è uguale alla somma del tasso di crescita della forza lavoro e del progresso tecnico, ma è del tutto indipendente dal livello della tecnologia e dal risparmio.

Tuttavia, un incremento del risparmio ha effetti positivi sul rapporto capitale/prodotto. Supponendo infatti che il risparmio sia una proporzione costante s del reddito ($S = sY$), che il risparmio sia uguale agli investimenti e utilizzando la condizione che nel lungo periodo $\frac{\dot{K}}{K} = n + g$, si ha

$$\frac{I}{K} = \frac{\dot{K}}{K} = \frac{sY}{K} = n + g\, . \qquad [1.9]$$

L'equazione [1.9] suggerisce anche che è sempre possibile esprimere il risparmio come prodotto tra tasso di crescita dell'economia e rapporto tra capitale e prodotto:

$$s = (n + g)\frac{K}{Y} \qquad [1.10]$$

In assenza di crescita della produttività e della forza lavoro, dunque, il risparmio netto dell'economia è nullo. Inoltre il risparmio dipende dal rapporto tra capitale e reddito. Nei capitoli successivi studieremo quali sono le variabili che determinano questo rapporto.